MATHEMATICA MORAVICA
VOL. 4 (2000), 1–4

CORECTION D'UNE DEMONSTRATION DANS UN TRAVAIL ANTERIEUR

Dušan Adamović

Sommaire. Il s'agit dans cette Note de la correction d'une partie de la démonstration du Lemme 1 dans le travail [1], suivie de quelques considérations supplémentaires.

Il s'agit de notre travail "Résolutions de deux équations fonctionnelles proches de l' équation de Cauchy" [1], qui contient deux théorèmes, relatives aux solutions des équations fonctionnelles

$$f(f(x+y)) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

et

$$f(x+y) = f(f(x)) + f(f(y)), \tag{2}$$

respectivement, la fonction inconnue pouvant, dans les deux cas, être *réelle* ($f : R \to R$; R ensemble des nombres réels) ou *complexe* ($f : C \to C$; C ensemble des nombres complexes). Ces deux théorèmes, ainsi que leurs démonstrations, sont, à notre avis, tout-à-fait corrects - mais ils déterminent, tous les deux, les solutions générales des équatinos (1) et (2) au moyen de la solution générale du système d'équations fonctionnelles

$$\begin{cases} g(x+y) = g(x) + g(y) \\ g(g(x)) = g(x) \end{cases} \qquad (g : R \to R, \text{ ou } g : C \to C), \tag{3}$$

et cette solution générale est donnée (décrite) par l'énoncé suivant (Lemme 1): "La solution générale du système d'équations fonctionnelles (3) est donnée par

$$g(x) \begin{cases} = x, & x \in H_0 \\ \in \mathcal{L}(H_0), & x \in H \backslash H_0 \\ = \sum_{h \in H} \alpha_h g(h), & x = \sum_{h \in H} \alpha_h h \end{cases}$$

AMS (MOS) Classification de sujets. Primaire: 39B22, 39B32. Secondaire: .
Mots et phrases clés: équation fonctionnelle, espace linéaire, base d'Hamel.

(H base d'Hamel de R, ou de C, déterminée; H_0 partie non vide de H arbitraire; $\mathcal{L}(H_0)$ variété linéaire sur H_0; $\alpha_h(h \in H)$ nombres rationnels)".

Tout d'abord, notre opinion est qu'il faut remplacer dans cet énoncé le mot "*déterminée*" par le mot "*arbitraire*". A vrai dire, lorsqu'on dit seulement que la base d'Hamel est déterminée, sans préciser les conditions qui la "déterminent", on n'a pas nié la posibilité qu'elle soit arbitrairement choisie, c'est-à-dire arbitraire (on en a seulement suggéré qu'elle doit être fixée après ce choix, ce qui est sous entendu d'ailleurs); les deux énoncés sont donc logiquement équvalents. Nous pensons toutefois que l'énoncé sera plus convenable après ce changment-là: d'abord par ce que l' on pourrait interpréter l'énoncé où la base est "déterminée" comme l'affirmation que toute les solutions sont données au moyen d'une seule base d'Hamel, ce qu'on ne voulait pas dire, et, d'autre part, puisque l'énoncé cité nous avait conduit à la démonstration du lemme dont la première partie contenait une faute assez grave, que nous allons corriger dans se qui suit. Cette faute provenait de la fausse supposition que, en général, dans un espace linéaire X l'inersection H_0 d'une base H de cet espace et de son sous-espace L soit toujours non vide et une base de L. En effet, si, par exemple, X est l'espace C des nombres complexes sur le champ R des nombres réels, $H = \{1, i\}$ est une base de X et $L = \{x + ix \mid x \in R\}$ est un sous-espace de X, mais on a $H \cap L = \emptyset$.

Afin de permettre au lecteur un aperçu complet du Lemme 1 et de sa démonstration, ainsi que du Lemme 2 qui y est utilisé, nous citerons ici, entre guillemets, le texte complet de la version nouvelle de la partie du travail située entre son second paragraphe et la fin de la section **0**:

<< **Lemme 1.** *La solution générale du système d'équations fonctionnelles*

$$(3) \qquad \begin{cases} g(x+y) = g(x) + g(y) \\ g(g(x)) = g(x) \end{cases} \qquad (g : R \to R, \ \ ou \ g : C \to C)$$

est donnée par

$$(4) \qquad g(x) \begin{cases} = x, & x \in H_0 \\ \in \mathcal{L}(H_0), & x \in H \backslash H_0 \\ = \sum_{h \in H} \alpha_h g(h), & x = \sum_{h \in H} \alpha_h h \end{cases}$$

(H base d'Hamel de R, ou de C, arbitraire; H_0 partie non vide da H arbitraire; $\mathcal{L}(H_0)$ variété linéaire sur H_0; α_h ($h \in H$) nombres rationnels).

Dans la démonstration de ce lemme on va s appuyer sur le

Lemme 2. *La solution générale de l'équation fonctionnelle*

$$(5) \qquad g(g(x)) = g(x) \quad (g : E \to E; \ E \ \text{ensemble non vide donné})$$

peut être exprimée par

$$g(x)\begin{cases} = x, & x \in F \\ \in F, & x \in E\backslash F \end{cases}$$

(F sous-ensemble non vide de E arbitraire).

Pour sa démonstration, voir, par exemple, [2]. (Notons que les solutions de (5) jouent des rôles importants dans diverses questions; un tel rôle est mis on évidence dans [3].)

Démonstration du Lemme 1. Soit g une solution de (3). Alors, d'après le Lemme 2, on a

$$g(x) = x \quad (x \in L), \quad L = g(R), \text{ ou } L = g(C), \text{ et} \tag{6}$$

$$g(x) \in L \quad (x \in R\backslash L), \text{ ou } (x \in C\backslash L). \tag{7}$$

Or, L est un sous-espace de l'espace linéaire R, ou C, sur le champ des nombres rationnels. Soit H_0 une base d'Hamel de L et soit $H \supseteq H_0$ une base d'Hamel de R, ou de C. On a alors $g(x) = x$ $(x \in H_0)$ et $g(x) \in L = \mathcal{L}(H_0)$ $(x \in H\backslash H_0)$. D'après la première équation (3) (équation de Cauchy), on a aussi

$$g(x) = \sum_{h\in H} \alpha_h g(x) \quad (x = \sum_{h\in H} \alpha_h h),\ \alpha_h\ (h \in H) \text{ nombres rationnels}). \tag{8}$$

On a établi ainsi que g doit satisfaire à (4), avec les ensembles H et H_0 mentionnés dans ce qui précède.

D'autre part, si g satisfait à (4), avec H et H_0 arbitraires, alors on a d'abord (8), et par suite g satisfait à la première équation (3). On a aussi, pour tout $x \in \mathcal{L}(H_0) = L$, c'est-à-dire pour tout $x = \sum_{h\in H_0} \alpha_h h$, où les α_h $(h \in H_0)$ sont des nombres rationnels,

$$g(x) = \sum_{h\in H_0} \alpha_h g(h) = \sum_{h\in H_0} \alpha_h h = x,$$

et encore, pour $x = \sum_{h\in H} \alpha_h h$,

$$g(x) = \sum_{h\in H} \alpha_h g(h) \in \mathcal{L}(H_0) = L;$$

donc, g satisfait à (7), et par conséquent, d'après le Leme 2, à la seconde équation (3). >>

Remarque. Comme nous l'avons dit: malgré cette correction portant sur l'énoncé et (la première partie de) la démonstration du Lemme 1, les énoncés et les démonstrations des Théorèmes 1 et 2, où figure la fonction g décrite dans le Lemme 1, peuvent rester sans aucun changement. C'est vrai, mais les énoncés des *corollaires* de ces deux théorèmes (parties du travail en question sans beaucoup d'importance d'ailleurs) n'étaient pas complets en ce qui concerne la cas complexe. Leurs corrections ont déjà été données dans l'article [4].

1. Références

[1] D. D. Adamović, *Résolutions de deux équations fonctionnelles proches de l'équation de Cauchy*, Matematički vesnik **9 (24)**, 1972, pp. 19-22.

[2] D. D. Adamović, *Solution du problème* No. 20, Matematički vesnik, **2 (17)**, sv. 1, 1965, p. 100.

[3] S. B. Prešić, *Une classe d'équations matricielles et l'équation fonctionnele* $f^2 = f$, Publications de l'Institut mathématique, Belgrade, t. **8 (22)**, 1968, pp. 143-148.

[4] D. D. Adamović, *Corrections and Supplements of Some Details in two Former Papers*, Univ. Belgrade, Publ. Elektrotehn. Fac. Ser. Mat. **2** (1991), 42-48.

Yugoslavia

Received ...